UNIDAD DE APRENDIZAJE III

Saberes procedimentales	Saberes declarativos
1. Utiliza correctamente el lenguaje algebraico, geométrico y trigonométrico. 2. Identifica la simbología propia de la geometría y la trigonometría.	Círculo trigonométrico. Funciones trigonométricas para cualquier valor del ángulo. Angulos positivos y negativos, cuadrangulares, coterminales y simétricos. Gráfica de las funciones trigonométricas básicas.

A Plano Cartesiano

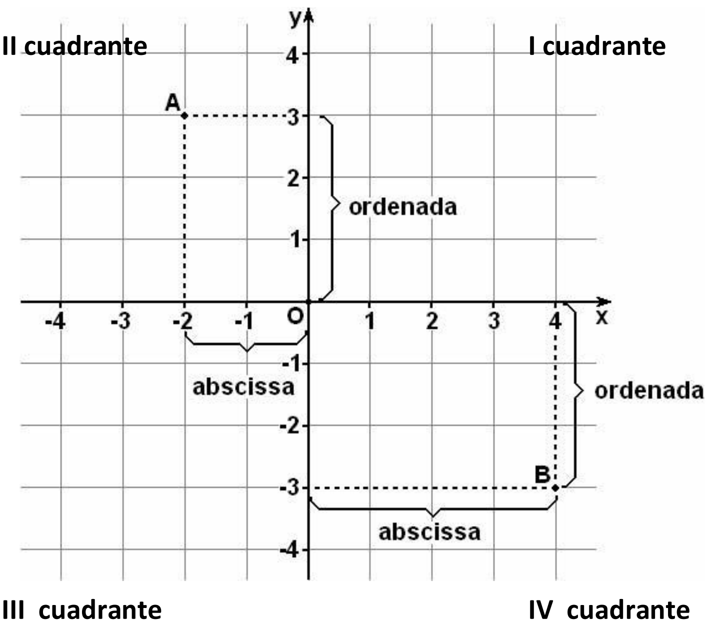
El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen y se divide en cuatro cuadrantes, como se muestra en la figura.

El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados.

Pero **¿qué son las coordenadas?**

Las coordenadas se forman asociando un valor del eje de las "x" a uno de las "y", respectivamente, esto indica que un punto (P) se puede ubicar en el plano cartesiano tomando como base sus coordenadas, lo cual se representa como: **P (x, y).**

Como graficar en el plano cartesiano:



Punto A
$P(-2,3)$

Para graficar este punto se debe avanzar 2 unidades hacia el lado izquierdo (negativo) en el eje de las "x" o abscisas y 3 unidades hacia arriba (positivo) en el eje de las "y" u ordenadas.

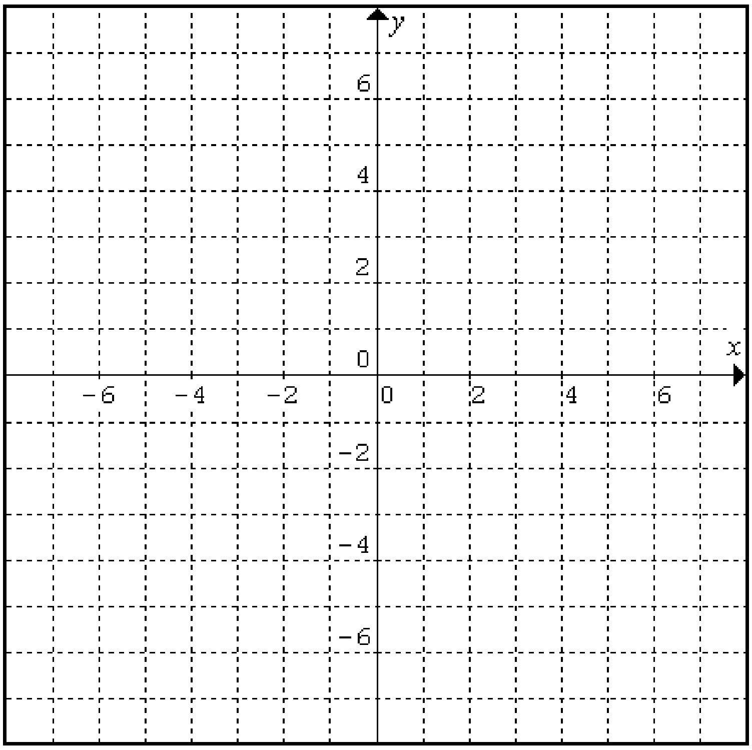
¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

P(,)

Ejercicios

1. Grafica los siguientes puntos en el plano cartesiano.

   $PA(\ 3,-4);\quad PB(-5,2);\quad PC(\ 4{,}6);\quad PD(-3,-4)$



2. Indica en que cuadrante se encuentra cada punto:

   $PA(\ 3,-4)$: ___________*Cuadrante*

   $PB(-5,2)$: ___________*Cuadrante*

   $PC(\ 4{,}6)$: ____________*Cuadrante*

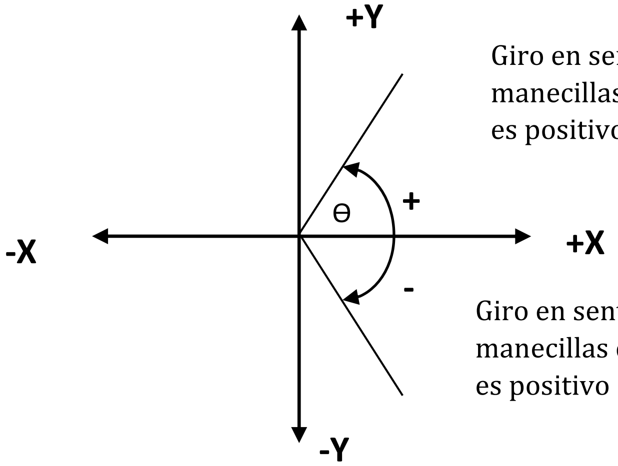
   $PD(-3,-4)$: ___________*Cuadrante*

Ángulos positivos, negativos y coterminales.

Conceptos básicos de un ángulo ubicado en un eje de coordenadas:

Ángulo en posición estándar: Si ubicamos un ángulo de cualquier magnitud en un plano cartesiano, éste ángulo tiene su lado inicial en el eje de las “X” positivo y gira en cualquier sentido.

Ángulos positivos y negativos: Cuando un ángulo en posición estándar o normal, gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, se dice que es positivo o levógiro y cuando gira en sentido de las manecillas del reloj es negativo o dextrógiro.



No importa en el sentido en que gire el lado móvil del ángulo; si este termina en el primer cuadrante, se dice que es un ángulo del primer cuadrante, si termina en el segundo, será un ángulo del segundo cuadrante y lo mismo aplica para los dos cuadrantes restantes.

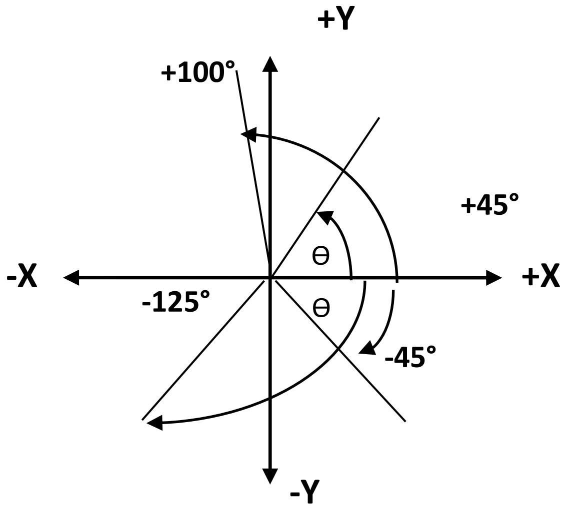
Si el lado terminal coincide con alguno de los ejes coordenados, entonces este ángulo se llama cuadrangular o cuadrantal.

Ángulos coterminales: Cuando dos o más ángulos coinciden en su lado inicial y en su lado terminal, no importa en el sentido en el que giren, se llaman coterminales.

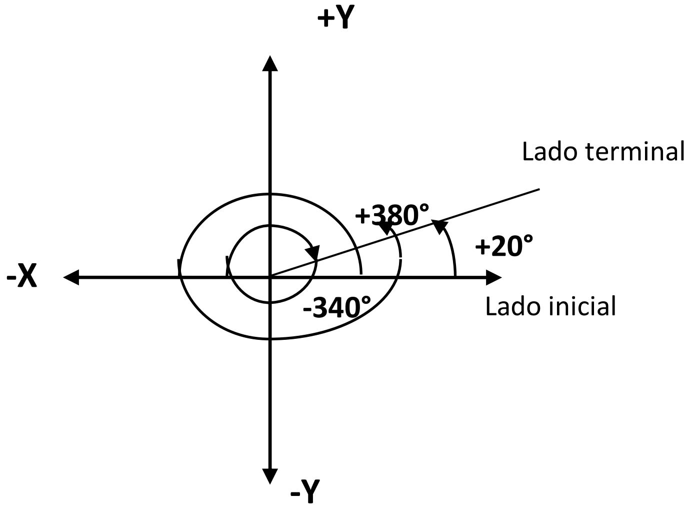
Ejemplos

1.- Traza los siguientes ángulos en el plano cartesiano: a) 45°, b) -45°, c) 100°, d) -125°.

Sol.



2.- Traza 2 ángulos coterminales a 20°, pueden ser positivos y/o negativos.



Para encontrar los ángulos coterminales, solo sumamos o restamos 360° al ángulo dado.

20°+360°= 380°

20°-360°= -340°

Ejercicios

1. Traza los siguientes ángulos en un plano cartesiano e indica de que cuadrante son.

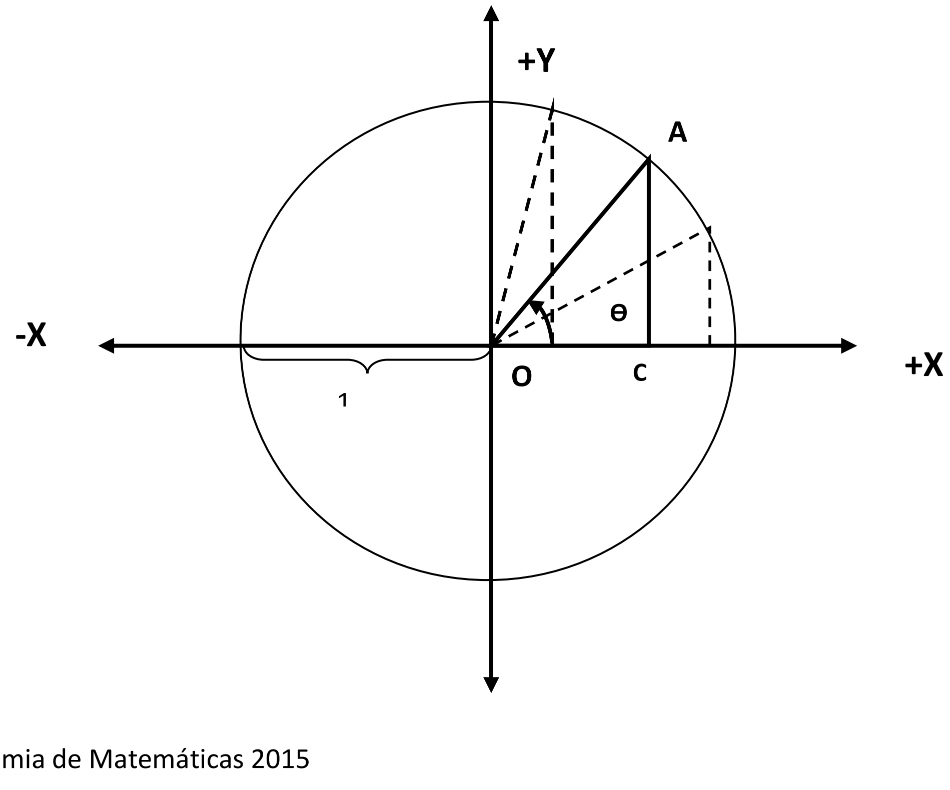
   a) 25°, b) 75°, c) 125°, d) 135°, e) 210°, f) 235°, g) 290°, h) -30°, i) -120°, j) -280°.

2. Traza dos ángulos coterminales para los siguientes ángulos.

   a) 30°, b) 50°, c) 135°, e)190°.

B Círculo Trigonométrico o círculo unitario

Este círculo que tiene su centro en el origen de los ejes coordenados y su radio mide la unidad. Es una herramienta que nos ayudará a fundamentar las funciones trigonométricas.



Sea OX la posición inicial del lado móvil, si se mueve este lado en contra de las manecillas del reloj, se formará un ángulo ϴ y al trazar la perpendicular del punto A al eje de las "X" formará un triángulo rectángulo AOC.

Analizando las funciones trigonométricas de este triángulo, en donde vemos que OA es la hipotenusa, AC es el cateto opuesto al ángulo ϴ Y OC es el cateto adyacente al ángulo ϴ tendremos que:

Función seno para I cuadrante

$$\boldsymbol{sen}\,\Theta = \frac{c.o}{h} = \frac{AC}{1} = AC \qquad pero\ si\ \Theta = \mathbf{0}°, entonces\ AC = 0$$

$$por\ lo\ tanto \qquad \boldsymbol{sen}\,\Theta = \frac{0}{1} = 0$$

$$en\ cambio\ si\ \Theta = \mathbf{90}°\ \ entonces\ AC = 1\ \ por\ lo\ tanto \qquad \boldsymbol{sen}\,\Theta = \frac{1}{1} = 1$$

Función coseno para I cuadrante

$$\mathbf{cos}\,\Theta = \frac{c.a}{h} = \frac{OC}{1} = OC \qquad pero\ si\ \Theta = \mathbf{0}°,\ \ entonces\ \ \ AC = 0\ \ y\ \ OC = 1$$

$$por\ lo\ tanto\ \ \boldsymbol{cos}\,\Theta = \frac{OC}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$en\ cambio\ si\ \Theta = \mathbf{90}°\ \ entonces\ OC = 0\ \ por\ lo\ tanto \qquad \boldsymbol{cos}\,\Theta = \frac{0}{1} = 0$$

Función tangente para I cuadrante

$$\boldsymbol{tan}\,\Theta = \frac{c.o}{c.a} = \frac{AC}{OC} \qquad pero\ si\ \ \Theta = \mathbf{0}°\ , entonces\ \ \ AC = 0\ \ \ y\ \ \ OC = 1$$

$$por\ lo\ tanto\ \ \boldsymbol{tan}\,\Theta\ = \frac{0}{1} =\ 0$$

$$en\ cambio\ si\ \Theta = \mathbf{90}°\ \ entonces\ AC = 1\ \ y\ OC =\ 0$$

$$por\ lo\ tanto \qquad \boldsymbol{tan}\,\Theta = \frac{1}{0} = \infty$$

Función cotangente para I cuadrante

$$\boldsymbol{cot}\ \Theta = \frac{c.a}{c.o} = \frac{OC}{AC} \qquad pero\ si\ \ \Theta = \mathbf{0}°\ , entonces\ \ \ AC = 0\ \ \ y\ \ \ OC = 1$$

$$por\ lo\ tanto\ \ \boldsymbol{cot}\,\Theta\ = \frac{1}{0} = \infty$$

$$en\ cambio\ si\ \Theta = \mathbf{90}°\ \ entonces\ AC = 1\ \ y\ OC =\ 0$$

$$por\ lo\ tanto\ \ \boldsymbol{cot}\,\Theta\ = \frac{0}{1} = 0$$

Función secante para I cuadrante

$$\boldsymbol{sec}\,\Theta = \frac{h}{c.a} = \frac{1}{OC} \qquad pero\ si\ \ \Theta = \mathbf{0}°\ , entonces \qquad OC = 1$$

$$por\ lo\ tanto\ \ \boldsymbol{sec}\,\Theta\ = \frac{1}{1} =\ 1$$

$$\boldsymbol{csc}\ \Theta = \frac{h}{c.o} = \frac{1}{AC} \qquad \textit{pero si}\ \ \Theta = \mathbf{0}°\ , \textit{entonces}\ \ AC = 0$$

$$\textit{por lo tanto}\ \ \boldsymbol{csc}\,\Theta\ = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\textit{en cambio si}\ \Theta = \mathbf{90}°\ \ \textit{entonces}\ AC = 1\ \ \textit{por lo tanto} \qquad \mathbf{csc}\,\Theta = \frac{1}{1} = 1$$

**Para los cuadrantes II,III y IV es lo mismo, solo se debe considerar el signo de los valores del cateto opuesto y del cateto adyacente.

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos cuadrangulares

¿Qué es un ángulo cuadrangular o cuadrantal?

Como su nombre lo dice, se les llama ángulos cuadrangulares ó cuadrantales a aquellos ángulos que tienen su lado terminal en algunos de los cuatro cuadrantes o ejes coordenados del plano cartesiano, son los ángulos de 0º, 90º, 180º, 270º, 360º y se utilizan mucho en diversas operaciones en el área de la trigonométrica, por lo que es importante conocer el valor de las seis principales funciones trigonométricas para cada uno de ellos.

El círculo trigonométrico nos ayuda a calcular los valores de estos ángulos como ya lo vimos anteriormente.

Función	$0°$ / 0	$90°$ / $\frac{\pi}{2}$	$180°$ / π	$270°$ / $\frac{3\pi}{2}$	$360°$ / 2π
Seno	0	1	0	-1	0
Coseno	1	0	-1	0	1
Tangente	0	∞	0	$-\infty$	0
Cotangente	∞	0	$-\infty$	0	∞
Secante	1	∞	1	∞	1
Cosecante	∞	1	∞	-1	∞

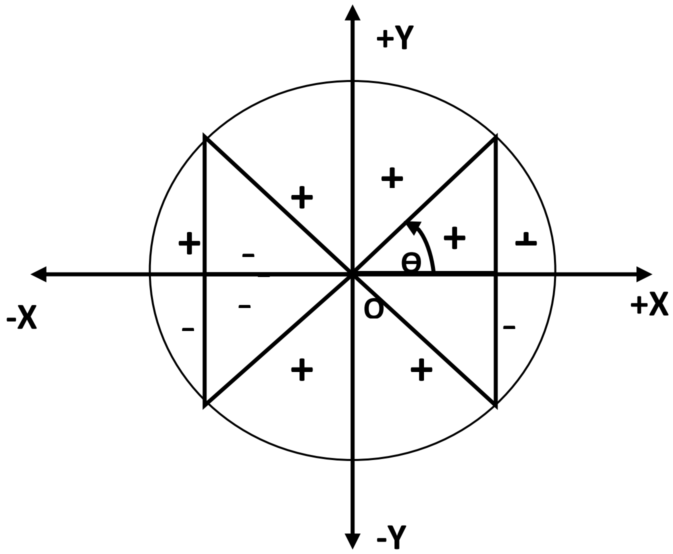
Signos de las funciones trigonométricas

En este caso el círculo trigonométrico también nos ayuda a conocer el signo de las funciones trigonométricas para cada cuadrante.

1er Cuadrante

$$\boldsymbol{sen\,\theta} = \frac{\boldsymbol{c.o}}{\boldsymbol{h}} = \frac{+}{+} = + \qquad \boldsymbol{cos\,\theta} = \frac{\boldsymbol{c.a}}{\boldsymbol{h}} = \frac{+}{+} = + \qquad \boldsymbol{tan\,\theta} = \frac{\boldsymbol{c.o}}{\boldsymbol{c.a}} = \frac{+}{+} = +$$

$$\boldsymbol{cot\,\theta} = \frac{\boldsymbol{c.a}}{\boldsymbol{c.o}} = \frac{+}{+} = + \qquad \boldsymbol{sec\,\theta} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{c.a}} = \frac{+}{+} = + \qquad \boldsymbol{tan\,\theta} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{c.o}} = \frac{+}{+} = +$$



Ejercicios

Determina los signos de las funciones trigonométricas para los cuadrantes II,III y IV con la ayuda del circulo trigonométrico. Completa la tabla.

Funciones	**Cuadrante**			
	I	II	III	IV
Seno	+			
Coseno	+			
Tangente	+			
Cotangente	+			
Secante	+			
Cosecante	+			

¿Para qué me sirve todo lo anterior?

Dada una función trigonométrica de un ángulo agudo, se pueden determinar las demás funciones a partir de la construcción de un triángulo rectángulo en el cuadrante que corresponda de acuerdo al signo de la función y a los valores que nos proporcionen, auxiliándonos del teorema de Pitágoras.

Ejemplos

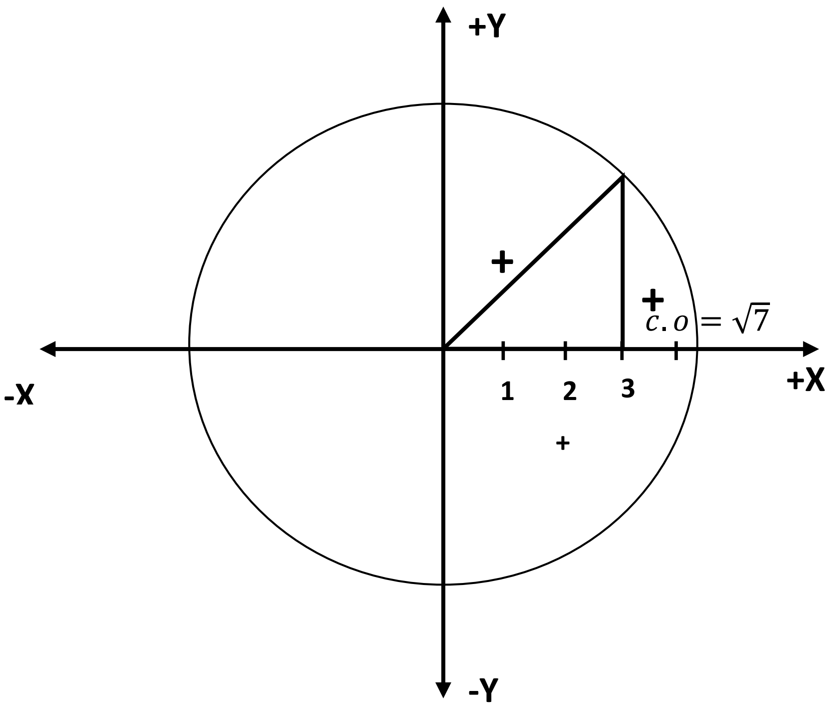
Si $cos\theta = \frac{3}{4}$, calcula el valor de todas las funciones trigonométricas para θ.

1.- Primero tenemos que recordar que la función $cos\theta = \frac{c.a}{h} = \frac{3\ (valor\ de\ cateto\ adyacente)}{4\qquad (valor\ de\ la\ hipotenusa)}$

2.- Como el signo de la función es positiva, tanto el cateto opuesto como la hipotenusa son positivos, por lo tanto si revisamos el círculo trigonométrico podemos trazar un triángulo con los valores que se proporcionan.

Para obtener el valor de todas las funciones necesitamos calcular el valor del cateto opuesto y lo haremos con el teorema de Pitágoras.

3.- Calcular el valor de c.o, que en este caso es el valor de "y".



$$h^2 = x^2 + y^2$$

$$4^2 = 3^2 + y^2$$

Despejamos "y"

$$c.o = y = \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$c.o = y = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

4.- Calculando todas las funciones:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{c.o}{h} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{c.a}{h} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{c.o}{c.a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\cot\theta = \frac{c.a}{c.o} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{h}{c.a} = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{h}{c.o} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$

Ejercicios

1.- Sea el punto A (-3, 4), grafica y determina las funciones trigonométricas del ángulo $\theta = \angle X\ O\ A$.

2.- Calcula las funciones trigonométricas para el ángulo β si, $\tan\beta = 4$ y $180° \leq \beta \leq 270°$. Grafica.

3.- Calcula las funciones trigonométricas de ángulo θ que forma el punto A(2, -5), grafica.

4.- Calcula las funciones trigonométricas del ángulo $\propto$ y determina a que cuadrantes corresponde si la $\csc\alpha = -\frac{3}{2}$.

5.- Calcula las funciones trigonométricas del ángulo $\propto$ y determina a que cuadrantes corresponde si la $\cot\alpha = -\frac{2}{\sqrt{7}}$.

6.- Calcula las funciones trigonométricas del ángulo $\propto$ que se encuentra en el primer cuadrante si su función $sen\ \theta = \frac{3}{5}$.

7.- Calcula las funciones trigonométricas del ángulo β si, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y π $\leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$.

8.- Calcula las funciones trigonométricas del ángulo θ si, $\cot\theta = -8$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$.

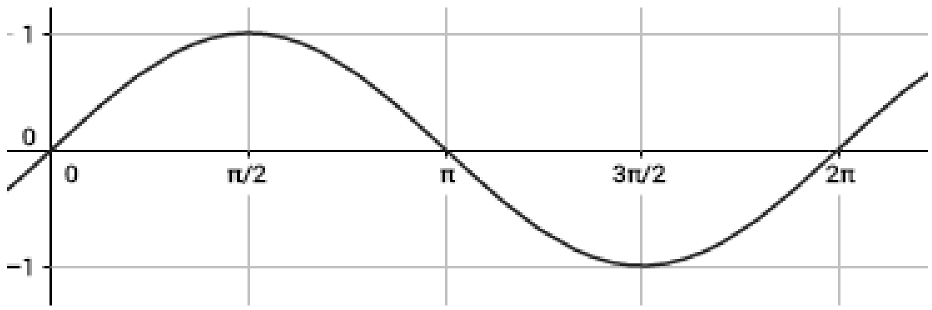
C Gráficas de las funciones trigonométricas básicas.

Para construir las gráficas de una función trigonométrica se dan valores al ángulo, estos van sobre el eje "X", los valores que se obtengan se grafican sobre el eje "Y".

Gráfica de $y = sen\ x$.

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3ð}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0

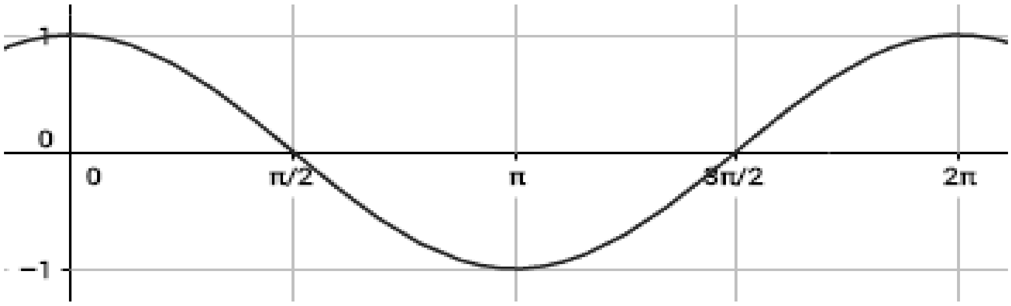
$\boldsymbol{y = sen\ x}$



Gráfica de $\boldsymbol{y = cos\ x}$.

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0	0.7	1

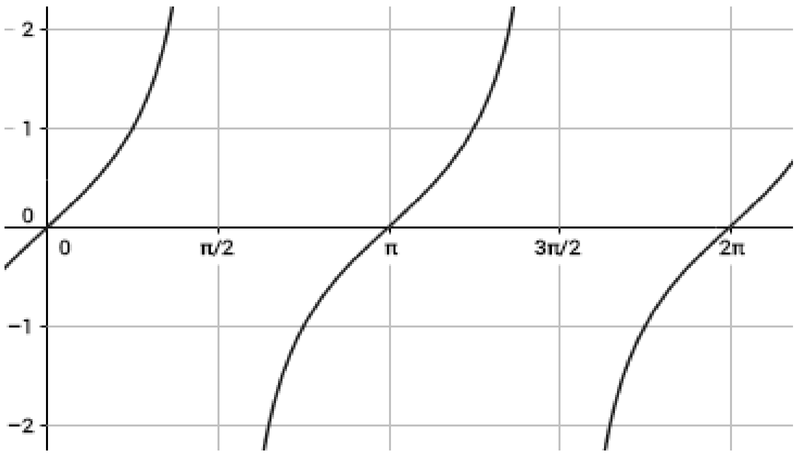
$$y = cos\ x$$



Gráfica de $y = tan\ x.$

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Y	0	0.57	1.7	∞	-1.7	-0.57	0	0.57	1.7	∞	-1.7	-0.57	0

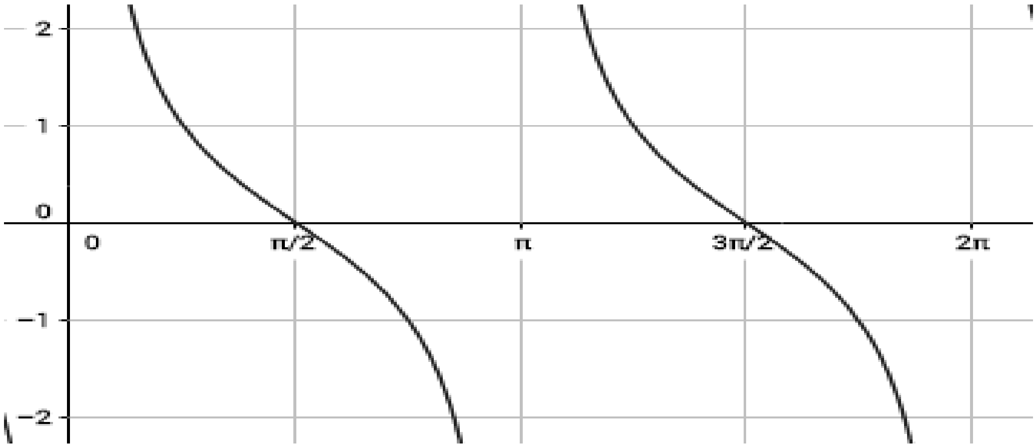
$$y = tan\ x$$



Gráfica de $y = cot\ x.$

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Y	∞	1.7	0.57	0	-0.57	-1.7	∞	1.7	0.57	0	-0.57	-1.7	0

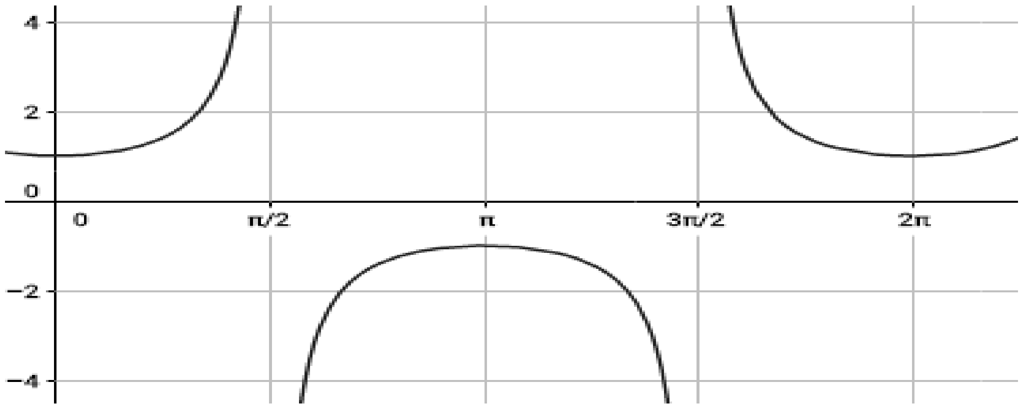
$y = cot\ x$



Gráfica de $y = sec\ x.$

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	1	1.4	$\pm\infty$	-1.4	-1	-1.4	$\pm\infty$	1.4	1

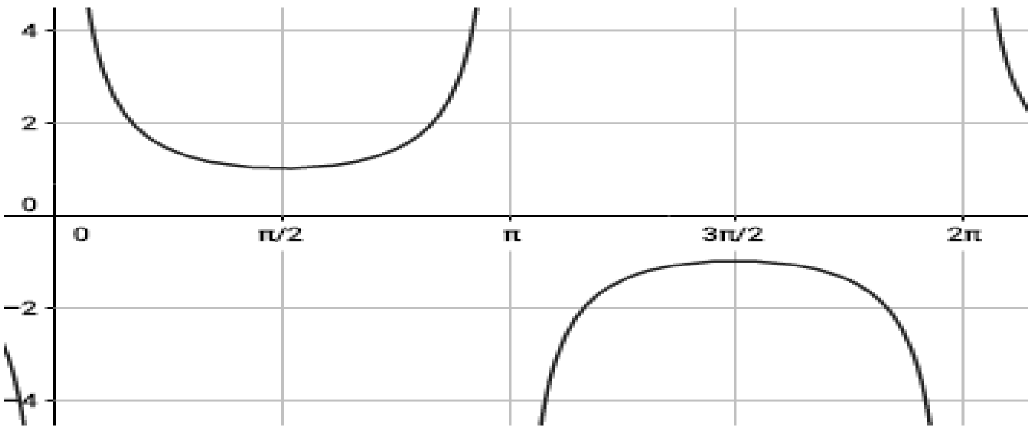
$y = sec\ x$



Gráfica de $y = csc\ x.$

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	$\pm\infty$	1.4	1	1.4	$\pm\infty$	-1.4	-1	-1.4	$\pm\infty$

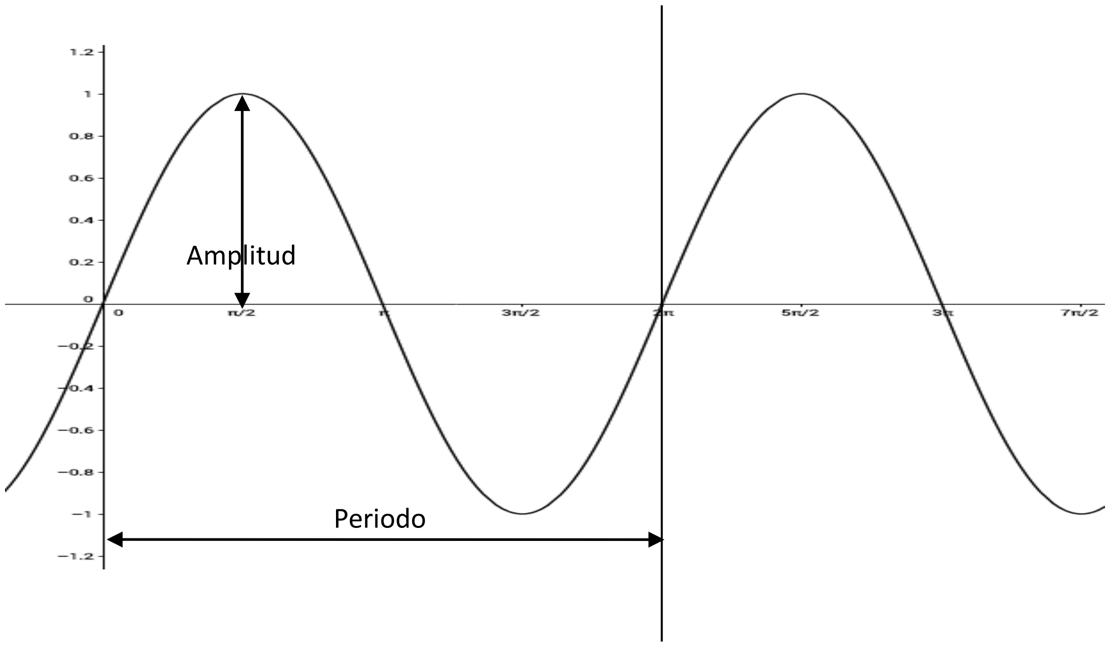
$\boldsymbol{y = csc\ x}$



Amplitud y periodo.

Si $y = sen\ bx$, o bien $y = cos\ bx$ para $a, b\ \in R\ \neq 0$, entonces la grafica tiene amplitud $|a|$, y periodo $\frac{2\pi}{|b|}$.

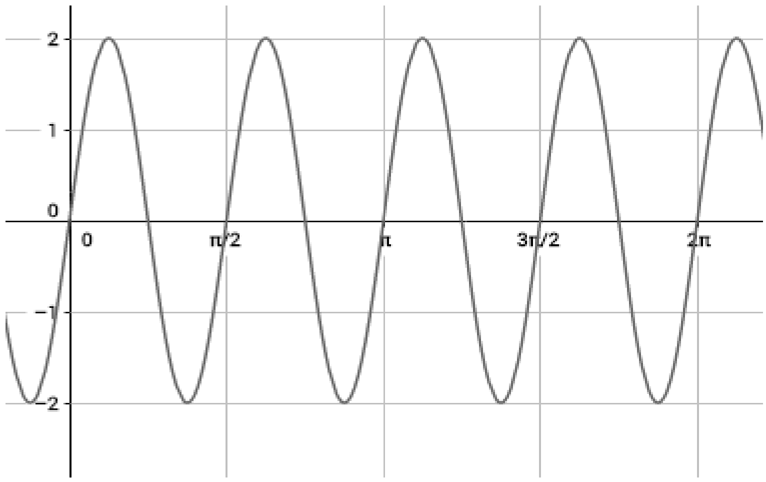
Pero ¿Qué es la amplitud y que es el periodo?



Ejemplos

1.- Calcula la amplitud, el periodo y traza la gráfica de $y = 2sen\ 4x$

$amplitud = \ |a| = |2| = 2 \qquad periodo = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



Ejercicios

Calcula la amplitud y el periodo y grafica las siguientes funciones.

a) $y = 4sen\ 2x$

b) $y = 2cos\ 2x$

c) $y = \frac{1}{2}sen\ 2x$

d) $y = sen\ \frac{1}{2}x$

e) $y = 6cos\ 4x$

f) $y = \frac{2}{3}cos\ \frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{1}{4}sen\ 6x$

h) $y = cos\ \frac{1}{2}x$